



MỤC LỤC

• Đề thi ①. CHUYÊN VĨNH PHÚC	3
• Đề thi ②. CHUYÊN TỈNH BÀ RỊA - VŨNG TÀU	8
• Đề thi ③. CHUYÊN SỞ GD&ĐT BẠC LIÊU	13
• Đề thi ④. CHUYÊN TỈNH BẮC KẠN	17
• Đề thi ⑤. CHUYÊN TỈNH BẮC NINH	22
• Đề thi ⑥. CHUYÊN TỈNH BÌNH ĐỊNH.....	29
• Đề thi ⑦. CHUYÊN TỈNH BÌNH PHƯỚC.....	34
• Đề thi ⑧. CHUYÊN TỈNH BÌNH THUẬN.....	41
• Đề thi ⑨. CHUYÊN TỈNH CẦN THƠ.....	46
• Đề thi ⑩. CHUYÊN THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN TỈNH ĐÀ NẴNG	54
• Đề thi ⑪. CHUYÊN TỈNH DAKLAK	61
• Đề thi ⑫. CHUYÊN TỈNH ĐẮC NÔNG	67
• Đề thi ⑬. CHUYÊN TỈNH HÀ GIANG.....	73
• Đề thi ⑭. CHUYÊN TỈNH ĐIỆN BIÊN	79
• Đề thi ⑮. CHUYÊN TỈNH ĐỒNG NAI.....	81
• Đề thi ⑯. CHUYÊN TỈNH ĐỒNG THÁP	86
• Đề thi ⑰. CHUYÊN TỈNH GIA LAI.....	91
• Đề thi ⑱. CHUYÊN TỈNH HÀ NAM	96
• Đề thi ⑲. CHUYÊN - ĐHSPT	107
• Đề thi ⑳. CHUYÊN CHUYÊN KHTN HN	114
• Đề thi ㉑. CHUYÊN TP HÀ NỘI – CHUYÊN TÍN	120
• Đề thi ㉒. CHUYÊN TỈNH HÀ TĨNH	125
• Đề thi ㉓. CHUYÊN NGUYỄN TRÃI -HD.....	131
• Đề thi ㉔. CHUYÊN TRẦN PHÚ - HP.....	139
• Đề thi ㉕. CHUYÊN SỞ HÒA BÌNH	144
• Đề thi ㉖. CHUYÊN TP-HCM.....	150



• Đề thi 27. CHUYÊN TP-HCM.....	154
• Đề thi 28. CHUYÊN TP-HUẾ.....	161
• Đề thi 29. CHUYÊN TỈNH HƯNG YÊN	167
• Đề thi 30. CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN TỈNH KHÁNH HÒA	173
• Đề thi 32. CHUYÊN TỈNH LAI CHÂU	187
• Đề thi 33. CHUYÊN THPT CHUYÊN CHU VĂN AN TỈNH LẠNG SƠN	192
• Đề thi 34. CHUYÊN TỈNH LÀO CAI	199
• Đề thi 35. CHUYÊN TỈNH LÂM ĐỒNG	205
• Đề thi 36. CHUYÊN TỈNH LONG AN.....	215
• Đề thi 37. CHUYÊN TỈNH NAM ĐỊNH	223
• Đề thi 38. THPT CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU TỈNH NGHỆ AN.....	231
• Đề thi 39. CHUYÊN TỈNH NINH THUẬN	238
• Đề thi 40. CHUYÊN TỈNH PHÚ THỌ	244
• Đề thi 41. CHUYÊN TỈNH PHÚ YÊN	250
• Đề thi 42. CHUYÊN TỈNH QUẢNG BÌNH	256
• Đề thi 43. CHUYÊN TỈNH QUẢNG NAM.....	261
• Đề thi 44. CHUYÊN TỈNH QUẢNG NAM.....	267
• Đề thi 45. CHUYÊN TỈNH QUẢNG NINH.....	275
• Đề thi 46. CHUYÊN TỈNH QUẢNG TRỊ.....	279
• Đề thi 47. CHUYÊN TỈNH SÓC TRĂNG.....	284
• Đề thi 48. CHUYÊN TỈNH SƠN LA	291
• Đề thi 49. CHUYÊN TỈNH TÂY NINH	296
• Đề thi 50. CHUYÊN TỈNH THÁI BÌNH	302
• Đề thi 51. CHUYÊN TỈNH THÁI NGUYÊN	311
• Đề thi 52. CHUYÊN TỈNH THANH HÓA.....	316
• Đề thi 53. CHUYÊN TỈNH TIỀN GIANG	324
• Đề thi 54. CHUYÊN TỈNH TUYỀN QUANG	336
• Đề thi 55. CLB TOÁN HỌC CHUYÊN BẢO LỘC - HN	342



CHUYÊN VĨNH PHÚC ĐỀ CHÍNH THỨC	KỶ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT Năm học 2025-2026 Môn thi: TOÁN CHUYÊN Thời gian làm bài 120 phút, không kể thời gian phát đề
---	---

♦ Đề thi ①. **CHUYÊN VĨNH PHÚC**

Câu 1: (2.0 điểm).

a) Giải phương trình $\sqrt{3x+1} + \sqrt{9x-5} = 4$

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} xy + 2x + 4 = 10y(1) \\ x^2y^2 + 4xy + 16 = 28y^2(2) \end{cases}$$

Câu 2: (1.5 điểm). Ở một cửa hàng chuyên kinh doanh miến, mỗi kilogram miến có giá nhập về là 70 nghìn đồng và giá bán ra niêm yết là 100 nghìn đồng. Biết rằng trong giá bán niêm yết đó chủ cửa hàng phải chi trả 15% cho tất cả các khoản như thuế, phí quản lý, giao hàng,... Tại thời điểm hiện nay, mỗi ngày cửa hàng đang bán được 200 kg miến. Nhân dịp khai trương thêm chi nhánh mới, chủ cửa hàng muốn chạy chương trình khuyến mãi giảm giá bán. Biết rằng nếu giảm mỗi 1% của giá bán niêm yết ban đầu thì khối lượng hàng bán được tăng thêm 40 kg. Hỏi chủ cửa hàng đó cần giảm giá bao nhiêu % của giá bán niêm yết ban đầu để thu được lợi nhuận lớn nhất trong một ngày?

Câu 3: (1.5 điểm).

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn phương trình

$$x^2 + (x-1)^2 = y^4 + (y-1)^4$$

b) Cho hai số nguyên dương m, n thỏa mãn $5^n - 1$ chia hết cho $(5^m - 1)^2$. Chứng minh rằng: n chia hết cho $m(5^m - 1)$

Câu 4: (2.0 điểm).

a) Chứng minh rằng: $6\sqrt{x-1} + x\sqrt{5-x^2} \leq 8$ với $1 \leq x \leq \sqrt{5}$

b) Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác có chu vi bằng 3. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$T = \frac{4}{a+b} + \frac{4}{b+c} + \frac{4}{c+a} - \frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c}$$

Câu 5: (3.0 điểm). Cho tam giác nhọn ABC có $AB < AC$. Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC , tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại các điểm D, E, F . Đường thẳng AI cắt đường thẳng BC tại điểm X .

a) Kẻ đường kính DH của đường tròn (I) , tiếp tuyến tại H của đường tròn (I) cắt các cạnh AC, AB lần lượt tại các điểm P, Q . Gọi M, N tương ứng là các điểm đối xứng với X qua các đường thẳng IC, IB .

Chứng minh rằng: MN vuông góc với DH và $QH \cdot BD = PH \cdot CD$.

b) Đường thẳng AI cắt các đường thẳng DE, DF lần lượt tại các điểm G, J . Gọi K là trung điểm của cạnh BC . Chứng minh rằng $QH \cdot BD = IG \cdot IJ$ và tam giác KGJ cân.

c) Biết tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O , bán kính R . Đường thẳng BI cắt đường thẳng CA tại điểm Y , đường thẳng CI cắt đường thẳng AB tại điểm Z . Chứng minh rằng:



$$\frac{1}{AX} + \frac{1}{BY} + \frac{1}{CZ} < \frac{2}{R - OI}$$

HẾT

ĐÁP ÁN

Câu 1:

a) Điều kiện xác định: $x \geq \frac{5}{9}$. Xét các trường hợp

Nếu $x > 1$ thì $\sqrt{3x+1} + \sqrt{9x-5} > \sqrt{3.1+1} + \sqrt{9.1-5} = 4 = 4$ hay VT > VP nên phương trình vô nghiệm.

Nếu $\frac{5}{9} \leq x < 1$ thì $\sqrt{3x+1} + \sqrt{9x-5} < \sqrt{3.1+1} + \sqrt{9.1-5} = 4 = 4$ hay VT < VP nên phương trình vô nghiệm.

Xét $x = 1$ thấy thỏa mãn. Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$.

b) Từ phương trình (1) ta có $xy + 4 = 10y - 2x$ nên $(xy + 4)^2 = (10y - 2x)^2$.

Kết hợp với phương trình (2) ta được

$$(xy + 4)^2 - (x^2y^2 + 4xy + 16) = (10y - 2x)^2 - 28y^2$$

hay $x^2 - 11xy + 18y^2 = 0$, từ đây có $(x - 2y)(x - 9y) = 0$. Ta xét hai trường hợp

Nếu $x - 2y = 0$ thì $x = 2y$, thay trở lại (1) được $y^2 - 3y + 2 = 0$.

Giải tìm được $(x, y) \in \{(2;1); (4;2)\}$.

Nếu $x - 9y = 0$ thì $x = 9y$, thay trở lại (1) được $9y^2 + 8y + 4 = 0$, phương trình này có $\Delta' = 4^2 - 9.4 < 0$ nên phương trình vô nghiệm.

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x, y) \in \{(2;1); (4;2)\}$.

Câu 2:

Giả sử cửa hàng cần giảm giá $x\%$ của giá bán niêm yết ban đầu để thu được lợi nhuận lớn nhất trong một ngày ($x \geq 0$).

Để có lợi nhuận khi bán thì $100 - x\%.100 = 100 - x > 70$ hay $x < 30$.

Nếu giảm mỗi 1% của giá bán niêm yết ban đầu thì khối lượng hàng bán được tăng thêm 40 kg, như vậy nếu giảm $x\%$ thì giá bán là $100 - x$ (nghìn đồng), khi đó mỗi ngày cửa hàng bán được $200 + 40x$ (kg). Như vậy lợi nhuận trong một ngày được tính theo biểu thức

$$T = (100 - x)(200 + 40x) - 15\%(100 - x)(200 + 40x) - 70(200 + 40x)$$

$$T = -34x^2 + 430x + 3000$$

$$\text{Có } T = -34x^2 + 430x + 3000 = -34\left(x - \frac{215}{34}\right)^2 + \frac{148225}{34} \leq \frac{148225}{34}$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = \frac{215}{34}$ (thỏa mãn)



Vậy cửa hàng cần giảm giá $\frac{215}{34}\%$ của giá bán niêm yết ban đầu để thu được lợi nhuận lớn nhất trong một ngày.

Câu 3:

a) Thu gọn hai vế của đẳng thức cho thành

$$x^2 - x = y^4 - 2y^3 + 3y^2 - 2y$$

Hay $x^2 - x + 1 = (y^2 - y + 1)^2$, suy ra $x^2 - x + 1$ là số chính phương.

Đặt $x^2 - x + 1 = a^2 (a \in \mathbb{Z})$ thì $(2x - 1)^2 + 3 = a^2$ hay $(a - 2x + 1)(a + 2x - 1) = 3$, giải tìm được $x = 0, x = 1$. Thay trở lại tìm được $(x, y) = \{(0,0);(0,1);(1,1);(1,0)\}$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Vậy tất cả các cặp số nguyên thỏa mãn bài toán là $(x,y) \in \{(0,0);(0,1);(1,1);(1,0)\}$.

b) Từ giả thiết có $n > m$ và $5^n - 1$ chia hết cho $5^m - 1$.

Đặt $n = km + r (k, n \in \mathbb{N}, k > 0, 0 \leq r < m)$ thì

$$5^m - 1 = 5^{km+r} - 1 = (5^{km} - 1).5^r + 5^r - 1$$

Do $5^{km} - 1$ chia hết cho $5^m - 1$ nên $5^r - 1$ chia hết cho $5^m - 1$.

Lại do $0 \leq 5^r - 1 < 5^m - 1$ nên phải có $5^r - 1 = 0$ hay $r = 0$.

Suy ra n chia hết cho m nên $n = mk$. Đặt $5^m = a (a \in \mathbb{N}^*, a > 1)$ thì $a - 1$ chia hết cho $(a - 1)^2$

Đề ý rằng $a^k - 1 = (a - 1)(a^{k-1} + a^{k-2} + \dots + a + 1)$ nên $a^{k-1} + a^{k-2} + \dots + a + 1$ chia hết cho $a - 1$

Mặt khác $a^{k-1} + a^{k-2} + \dots + a + 1 \equiv 1^{k-1} + 1^{k-2} + \dots + 1 + 1 \equiv k \pmod{a - 1}$

Do đó k chia hết cho $a - 1$. Vậy $n = mk$ chia hết cho $m(5^m - 1)$

Câu 4:

a) Theo BĐT Cauchy ta có:

$$6\sqrt{x-1} + x\sqrt{5-x^2} \leq 6 \cdot \frac{(x-1)+1}{2} + x \cdot \frac{(5-x^2)+1}{2} = \frac{12x-x^3}{2}$$

Ta chứng minh $\frac{12x-x^3}{2} \leq 8$, điều này tương đương với $(x-2)^2(x+4) \geq 0$ (luôn đúng với $1 \leq x \leq \sqrt{5}$). Đẳng thức xảy ra khi $x = 2$.

b) Từ giả thiết có $a < b + c, b < c + a, c < a + b$ nên $2a < 3, 2b < 3, 2c < 3$

Suy ra $0 < a, b, c < \frac{3}{2}$

Ta viết lại biểu thức $T = \left(\frac{4}{3-a} - \frac{1}{a}\right) + \left(\frac{4}{3-b} - \frac{1}{b}\right) + \left(\frac{4}{3-c} - \frac{1}{c}\right)$

Ta chứng minh $\left(\frac{4}{3-a} - \frac{1}{a}\right) \leq 2(a-1) + 1$, bất đẳng thức này tương đương với

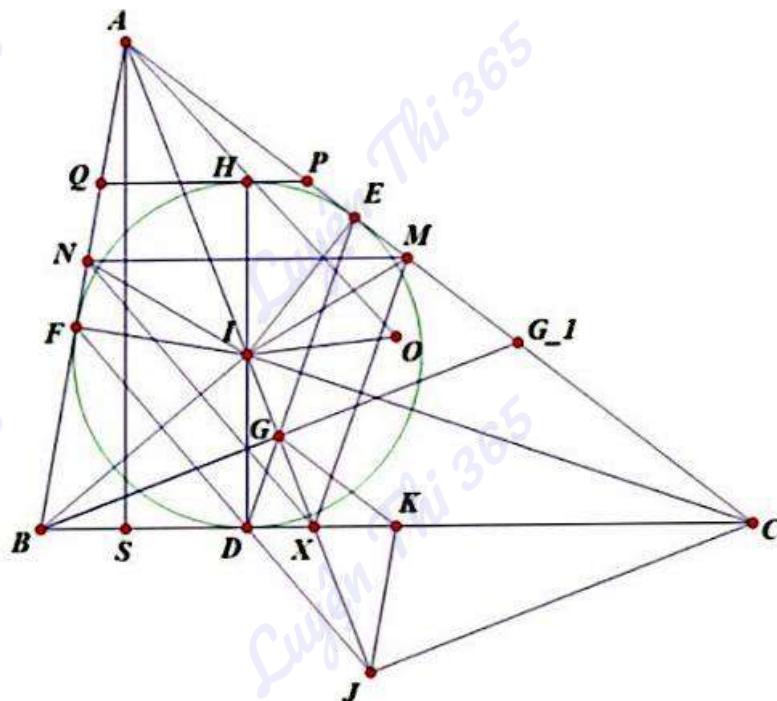


$$\frac{(a-1)^2(2a-3)}{a(3-a)} \leq 0 \text{ (luôn đúng do } 0 < a, b, c < \frac{3}{2} \text{)}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Vậy giá trị lớn nhất của T là 1, đạt được khi $a = b = c = 1$.

Câu 5:



a) Dễ thấy M thuộc AC , N thuộc AB và $IM = IN = IX$. Ta biến đổi góc

$$\widehat{HIN} = 180^\circ - \widehat{NID} = 180^\circ - (\widehat{NIX} - \widehat{XID}) = 180^\circ - (2\widehat{XIB} - \widehat{XID})$$

$$= 180^\circ - 2\widehat{BID} - \widehat{XID} = \widehat{ABC} - \widehat{XID}$$

$$\widehat{HIM} = 180^\circ - \widehat{MID} = 180^\circ - (\widehat{MIX} + \widehat{XID}) = 180^\circ - (2\widehat{CIX} + \widehat{XID})$$

$$\text{Đề ý rằng } \widehat{CIX} = 180^\circ - \widehat{AIC} = 180^\circ - \frac{90^\circ + \widehat{ABC}}{2} = 90^\circ - \frac{\widehat{ABC}}{2} = \widehat{BID}$$

Kết hợp hai đẳng thức trên ta có $\widehat{HIN} = \widehat{HIM}$. Lại do $IN = IM$ nên $\triangle IHN \sim \triangle IHM$, do đó $HN = HM$ nên IH là trung trực của MN , suy ra $IH \perp MN$,

$$\text{Ta có các kết quả quen thuộc } CD = CE = \frac{AC + BC - AB}{2}, BD = BF = \frac{AB + BC - AC}{2}$$

$$PH = PE = \frac{AQ + PQ - AP}{2}; QH = QF = \frac{AP + PQ - AQ}{2}$$

Do $MN \perp DH$ nên $MN \parallel BC$ suy ra

$$\frac{AP}{AC} = \frac{AQ}{AB} = \frac{PQ}{BC} = \frac{AP - AQ + PQ}{AC - AB + BC} = \frac{AQ - AP + PQ}{AB - AC + BC}$$



Từ đây có được $\frac{QH}{CD} = \frac{PH}{BD}$ nên $QH.BD = PH.CD$

b) Ta có: $\angle IGE = \angle IXM = 90^\circ - \angle CIX = \frac{\angle ABC}{2} = \angle IBD$ nên tứ giác BIGD nội tiếp. Tương tự có tứ giác CIDJ nội tiếp. Do đó $\angle IDG = \angle ICD = \angle IJD$

Suy ra $\triangle IGD \sim \triangle IDJ$ nên $IG.IJ = ID^2$

Lại có: $QH.BD = QF.BF = IF^2 = ID^2$ nên $QH.BD = IG.IJ$

Do tứ giác BIGD nội tiếp nên $\angle BGI = \angle BDI = 90^\circ$, kéo dài BG cắt AC tại G_1 thì $\triangle ABG_1$ cân tại A nên G là trung điểm G_1 , kéo theo KG là đường trung bình của $\triangle BG_1C$ nên $KG \parallel CG_1$, suy ra

$$\angle KGX = \angle CAX = \frac{\angle BAC}{2}.$$

Tương tự cũng có $KJ \parallel AB$ nên $\angle KJG = \angle XAB = \frac{\angle BAC}{2}$

Do đó $\angle KGJ = \angle KJG$ nên $\triangle KJG$ cân tại K

c) Kẻ $AS \perp BC$ tại S. Khi đó $\frac{XI}{XA} = \frac{ID}{AS} = \frac{S_{BIC}}{S_{ABC}}$

Tương tự $\frac{YI}{YB} = \frac{S_{AIC}}{S_{ABC}}, \frac{ZI}{ZC} = \frac{S_{AIB}}{S_{ABC}}$ lại do I nằm trong tam giác BAC nên

$$\frac{XI}{XA} + \frac{YI}{YB} + \frac{ZI}{ZC} = \frac{S_{AIB} + S_{BIC} + S_{CIA}}{S_{ABC}} = 1$$

$$\text{Từ đó suy ra } 2 = \frac{AI}{AX} + \frac{BI}{BY} + \frac{CI}{CZ} \geq \frac{AO - OI}{AX} + \frac{BO - OI}{BY} + \frac{CO - OI}{CZ}$$

$$\text{Hay } \frac{1}{AX} + \frac{1}{BY} + \frac{1}{CZ} \leq \frac{2}{R - OI} \quad (\text{do } R > OI).$$

Dấu “=” xảy ra khi $AO - OI = AI, BO - OI = BI, CO - OI = CI$

Điều này xảy ra khi tam giác BAC đều (trái với giả thiết $AB < AC$)

Như vậy phải có

$$\frac{1}{AX} + \frac{1}{BY} + \frac{1}{CZ} < \frac{2}{R - OI}$$

-----HẾT-----



ĐỀ CHÍNH THỨC	Năm học 2025-2026 Môn thi: TOÁN CHUYÊN Thời gian làm bài 120 phút, không kể thời gian phát đề
---------------	---

♦ Đề thi ②. CHUYÊN TỈNH BÀ RỊA - VŨNG TÀU

Câu 1:

a) Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3} - \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3} - \frac{36}{x-9}$ với $x \geq 0$ và $x \neq 9$.

b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2 + 6 = 0$.

Câu 2:

a) Giải phương trình $x^2 + 2x - 3 = 2(x-1)\sqrt{x+2}$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 3xy + x - y \\ 3\sqrt{x-1} = y + 4 \end{cases}$.

Câu 3:

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $(y+5)x^2 + 3(x-1) = y$.

b) Xét các số thực dương a, b, c thay đổi và thỏa mãn $ab + bc + ca + abc = 4$. Chứng minh rằng $abc \leq 1$ và tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{ab+c}{a^4+b^4+c} + \frac{bc+a}{b^4+c^4+a} + \frac{ca+b}{c^4+a^4+b} - \frac{3}{abc}$$

Câu 4: Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) , các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại điểm H . Đường tròn đường kính AH cắt (O) tại điểm K (K khác A). Các tiếp tuyến tại B, C của (O) cắt nhau tại điểm S . Giao điểm của hai đường thẳng SO, BC là M . Đường thẳng SK cắt (O) tại điểm L (L khác K). Chứng minh rằng:

a) $SB^2 = SL \cdot SK$

b) MB là tia phân giác của $\angle KML$ và $\angle SKB = \angle MKC$

c) Đường thẳng KD đi qua trung điểm của SM

Câu 5: Cho đa giác đều $A_1, A_2, \dots, A_{2026}$. Tại mỗi đỉnh A_k , người ta ghi một số nguyên a_k ($k = 1, 2, \dots, 2026$) sao cho $a_i \neq a_j; \forall i, j \in \{1; 2; \dots; 2026\}, i \neq j$ và giá trị tuyệt đối của hiệu hai số ghi trên hai đỉnh kề nhau là một số không lớn hơn 5. Tìm giá trị lớn nhất của $|a_i - a_j|; \forall i, j \in \{1, 2, \dots, 2026\}$.

-----HẾT-----

ĐÁP ÁN

Câu 1:



a) Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3} - \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3} - \frac{36}{x-9}$ với $x \geq 0$ và $x \neq 9$.

b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2 + 6 = 0$.

Lời giải

a) Ta có:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3} - \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3} - \frac{36}{x-9} = \frac{(\sqrt{x}+3)^2}{x-9} - \frac{(\sqrt{x}-3)^2}{x-9} - \frac{36}{x-9} \\ &= \frac{(\sqrt{x}+3)^2 - (\sqrt{x}-3)^2 - 36}{x-9} = \frac{12\sqrt{x} - 36}{x-9} = \frac{12(\sqrt{x}-3)}{x-9} = \frac{12}{\sqrt{x}+3} \end{aligned}$$

b) Phương trình $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ $\Delta' = (m+1)^2 - (m^2 - 2) = 2m + 31 > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{31}{2}$.

Theo định lý Viète ta có $x_1 + x_2 = 2(m+1)$ và $x_1x_2 = m^2 - 2$.

Do đó $x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 5x_1x_2 = 4(m+1)^2 - 5(m^2 - 2) = -m^2 + 8m + 14$.

Suy ra $x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2 + 6 = 0 \Leftrightarrow -m^2 + 8m + 20 = 0 \Leftrightarrow (m+2)(m-10) = 0 \Leftrightarrow m \in \{-2; 10\}$.

Kết hợp $m > -\frac{31}{2}$ thì $m = 10$. Thử lại thỏa mãn.

Vậy $m = 10$.

Câu 2:

a) Giải phương trình $x^2 + 2x - 3 = 2(x-1)\sqrt{x+2}$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 3xy + x - y \\ 3\sqrt{x-1} = y + 4 \end{cases}$.

Lời giải

a) Điều kiện xác định $x \geq -2$.

$$x^2 + 2x - 3 = 2(x-1)\sqrt{x+2}.$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x+3) = 2(x-1)\sqrt{x+2}.$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x+3-2\sqrt{x+2}) = 0.$$

TH1: $x = 1$, thỏa mãn.

$$\text{TH2: } x+3 = 2\sqrt{x+2} \Leftrightarrow (x+3)^2 = 4(x+2).$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1. \text{ Thử lại thỏa mãn.}$$

Vậy $x \in \{-1; 1\}$.

b) Điều kiện xác định: $x \geq 1$.

Phương trình thứ nhất cho ta



$$(x-y)(x-2y) = x-y \Leftrightarrow (x-y)(x-2y-1) = 0$$

TH1: $x=y$. Thay vào phương trình thứ hai ta có

$$3\sqrt{x-1} = x+4 \Leftrightarrow 9(x-1) = (x+4)^2$$

$\Leftrightarrow x^2 - x + 25 = 0$. Phương trình này vô nghiệm.

TH2: $x=2y+1$. Thay vào phương trình thứ hai ta có

$$3\sqrt{2y} = y+4 \Leftrightarrow 18y = (y+4)^2$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 10y + 16 = 0 \Leftrightarrow (y-2)(y-8) = 0 \Leftrightarrow y \in \{2; 8\}.$$

Với $y=2$ thì $x=5$. Với $y=8$ thì $x=17$. Thử lại ta đều thấy thỏa mãn.

Vậy $(x; y) \in \{(5; 2); (17; 8)\}$.

Câu 3:

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $(y+5)x^2 + 3(x-1) = y$.

b) Xét các số thực dương a, b, c thay đổi và thỏa mãn $ab+bc+ca+abc=4$. Chứng minh rằng $abc \leq 1$ và tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{ab+c}{a^4+b^4+c} + \frac{bc+a}{b^4+c^4+a} + \frac{ca+b}{c^4+a^4+b} - \frac{3}{abc}$$

Lời giải

$$a) (y+5)x^2 + 3(x-1) = y.$$

$$\Leftrightarrow (y+5)(x^2-1) + 3(x-1) + 5 = 0.$$

$$\Leftrightarrow (x-1)((y+5)(x+1)+3) = -5.$$

Đến đây ta suy ra 5: $(x-1)$ nên $x-1 \in \{\pm 1; \pm 5\}$ hay $x \in \{-4; 0; 2; 6\}$.

Với $x=-4$ thì $16(y+5)-15=y \Leftrightarrow 15y=-65 \Leftrightarrow y=-\frac{13}{3}$, không thỏa.

Với $x=0$ thì $y=-3$ thỏa mãn.

Với $x=2$ thì $4(y+5)+3=y \Leftrightarrow 3y=-23 \Leftrightarrow y=-\frac{23}{3}$, không thỏa.

Với $x=6$ thì $36(y+5)+15=y \Leftrightarrow 35y=-195 \Leftrightarrow y=-\frac{39}{7}$, không thỏa.

Vậy $(x; y) = (0; -3)$.

b) Áp dụng BDT AM - GM ta có $4 = ab+bc+ca+abc \geq 4\sqrt[4]{a^3b^3c^3} \Leftrightarrow abc \leq 1$.

Ta có BDT quen thuộc $a^4+b^4 \geq ab(a^2+b^2)$ và để ý rằng $c = c \cdot 1 \geq abc^2$ nên

$$a^4+b^4+c \geq ab(a^2+b^2) + abc^2 = ab(a^2+b^2+c^2)$$

Tương tự $b^4+c^4+a \geq bc(a^2+b^2+c^2), c^4+a^4+b \geq ca(a^2+b^2+c^2)$ nên