

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
TRƯỜNG THPT CHUYÊN KHTN

ĐỀ MINH HỌA THI VÀO LỚP 10
Năm học: 2024 – 2025

MÔN TOÁN (Toán chuyên)

(Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian phát đề)

Bài I.

1. Giải phương trình: $\frac{x^3 + 5x^2 + 4x + 2}{x^2 + 2x + 3} = \sqrt{x^2 + x + 2}$

2. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (x-1)(y^2+6) = y(x^2+1) \\ (y-1)(x^2+6) = x(y^2+1) \end{cases}$$

Bài II.

1. Tìm tất cả các bộ số nguyên (m, n, p) thỏa mãn $2^m \cdot p^2 + 1 = q^5$ trong đó $m > 0$; p, q là hai số nguyên tố.
2. Với các số thực không âm $a; b; c$ thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{ab+3}{a+b} + \frac{bc+3}{b+c} + \frac{ca+3}{c+a} \geq \frac{23}{4}$$

Bài III. Cho tam giác ABC ($BAC > 90^\circ$; $AC > AB$) nội tiếp đường tròn (O) ; M là trung điểm của BC ; P là điểm trên đoạn AM sao cho đường tròn ngoại tiếp tam giác BPM cắt cung nhỏ AB của (O) tại D , đường tròn ngoại tiếp tam giác CPM cắt cung nhỏ AC của (O) tại E . Các đường thẳng DP ; EP lần lượt cắt các đường tròn ngoại tiếp tam giác CPM ; BPM tại giao điểm thứ hai là X ; Y

1. Chứng minh: BD ; CE cắt nhau tại điểm N nằm trên đường thẳng AM .
2. Chứng minh: 4 điểm X ; B ; Y ; C nằm trên một đường tròn.
3. Chứng minh: Khi điểm P thay đổi trong đoạn AM thì đường tròn ngoại tiếp tam giác AXY luôn đi qua 1 điểm cố định khác A .

Bài IV. Trên bảng có viết bốn số $10, -9, -8, 7$. Người ta thực hiện một “trò chơi” như sau: *Mỗi lượt cứ có bốn số a, b, c, d (theo thứ tự nào đó) thì xóa hết và thay bằng các số $a - 2b, b - 2c, c - 2d, d - 2a$.* Quá trình được lặp lại vô hạn lần. Chứng minh rằng với bất cứ bốn số a, b, c, d thu được nào thì ba số $|ab - cd|, |ac - bd|$ và $|ad - bc|$ không thể đồng thời là số nguyên tố.